Dal teorema di Aron all'inserzione Aron

Parte Seconda: Calcolo della potenza attiva

Prof. ing. Antonio Martino

SOMMARIO

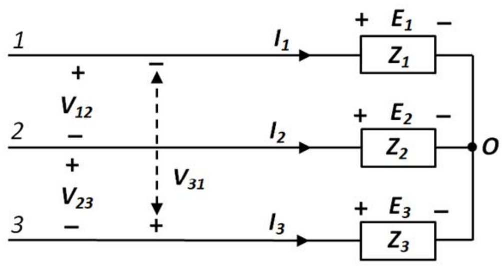
1 INTRODUZIONE

Nella *Parte Prima* la verifica del teorema di Aron e dell'inserzione Aron è avvenuta con la **misura** della potenza attiva in circuiti simulati con ***Multisim***. Ora, invece, per la verifica si **calcola** negli stessi circuiti la potenza attiva con un centro stella qualsiasi, usando in tutti i passaggi intermedi i valori numerici di un programma scritto su un foglio di ***Excel***.

> Si precisa che i risultati parziali (e finali) sono forniti di solito con sei cifre significative, ma ogni volta gli arrotondamenti sono ottenuti con i risultati di *Excel*, che prevede sempre l'uso di 15 cifre.

La potenza attiva da calcolare è quella assorbita dal circuito nella figura 1:

Fig. 1



in cui anche qui si ritiene che la stella squilibrata con centro *O* sia *equivalente* a un complesso di carichi *trifasi* (collegati a stella e a triangolo) e *monofasi* derivati dalla stessa linea trifase a tre fili. $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$ sono le tensioni di fase, cioè le tensioni stellate rispetto al centro stella *O*, e $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$ le correnti di linea che gli utilizzatori *complessivamente* assorbono e che – nella *stella equivalente* – coincidono con quelle di fase.

I valori efficaci delle tensioni di linea (o tensioni concatenate) dissimmetriche sono:

V_{12} = 370 V

V_{23} = 400 V

V_{31} = 450 V

e le impedenze squilibrate (con f=50 Hz):

$\mathbf{Z_1}$ = 30 + j20 Ω (L=63,6620 mH)

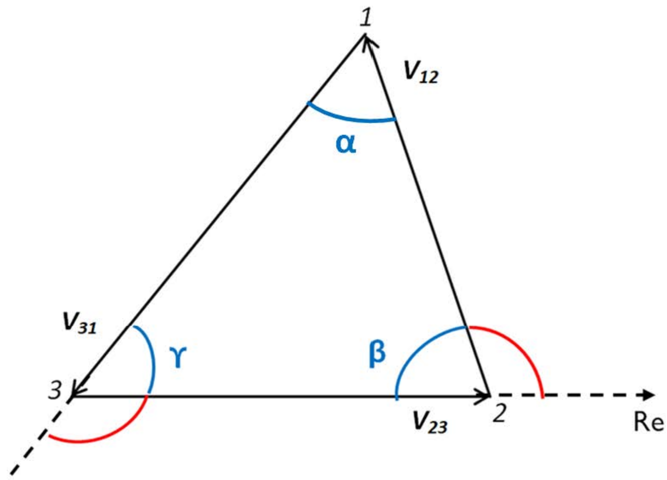
$\mathbf{Z_2}$ = 10 + j5 Ω (L=15,9155 mH)

$\mathbf{Z_3}$ = 18 + j6 Ω (L=19,0986 mH)

2 CALCOLO DELLE FASI DELLE TENSIONI DI LINEA

Per la seconda legge di Kirchhoff si ha: $\mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{23}} + \mathbf{V_{31}} = 0$: perciò, le tensioni di linea formano un triangolo (chiuso), come nella figura 2, di cui sono noti i lati (cioè, i valori efficaci) e quindi si possono ricavare gli angoli β e ϒ con il teorema di Carnot.

Fig. 2



Infatti:

$$V_{31} = \sqrt{V_{12}^2 + V_{23}^2 - 2 \cdot V_{12} \cdot V_{23} \cdot \cos\beta}$$

$$\cos\beta = \frac{V_{12}^2 + V_{23}^2 - V_{31}^2}{2 \cdot V_{12} \cdot V_{23}}$$

$$\beta = \arccos\frac{V_{12}^2 + V_{23}^2 - V_{31}^2}{2 \cdot V_{12} \cdot V_{23}}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\beta = \arccos\frac{370^2 + 400^2 - 450^2}{2 \cdot 370 \cdot 400} = 71{,}4024°$$

Dalla figura 2 si vede che la tensione $\mathbf{V_{12}}$ è **in anticipo** rispetto a $\mathbf{V_{23}}$ posta sull'asse reale, e perciò presa come riferimento per le fasi, dell'angolo: 180° – β = 180 – 71,4024° = 108,598°

(valore più preciso: 108,597 558 283 606°). Si ottiene, allora:

$\mathbf{V_{12}}$ = 370 /108,598° = –118 + j350,679 V (*Excel* dà: –118 + 350,679340708859**i**)

In modo analogo, si applica di nuovo con il teorema di Carnot per ricavare l'angolo ϒ. Infatti:

$$V_{12} = \sqrt{V_{23}^2 + V_{31}^2 - 2 \cdot V_{23} \cdot V_{31} \cdot \cos\gamma}$$

$$\cos\gamma = \frac{V_{23}^2 + V_{31}^2 - V_{12}^2}{2 \cdot V_{23} \cdot V_{31}}$$

$$\gamma = \arccos \frac{V_{23}^2 + V_{31}^2 - V_{12}^2}{2 \cdot V_{23} \cdot V_{31}}$$

Con i valori numerici:

$$\gamma = \arccos \frac{400^2 + 450^2 - 370^2}{2 \cdot 400^2 \cdot 450^2} = 51{,}1954°$$

Dalla stessa figura 2 risulta che $\mathbf{V}_{31}$ è **in ritardo** di 180° – ϒ = 180 – 51,195 4 = 128,805° rispetto a $\mathbf{V}_{23}$ (valore più preciso: –128,804 621 179 099°). Quindi:

$\mathbf{V}_{31} = 450\ \underline{/-128{,}805°} = -282 - j350{,}679$ V (con *Excel*: –282–350,679 340 708 859i)

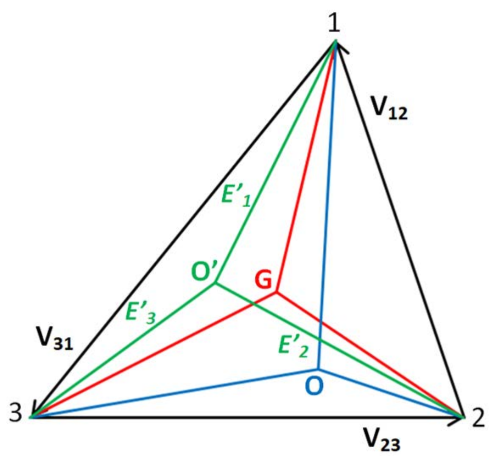
Naturalmente:

$\mathbf{V}_{23} = 400$ V $\underline{/0°}$

3 RELAZIONI TRA TENSIONI STELLATE E TENSIONI DI LINEA

In questo paragrafo si fa più volte riferimento alla figura 3 in cui sono disegnati il triangolo delle tensioni di linea e tre terne di tensioni stellate: due generiche di centro stella **O** e **O'**; la terza di centro stella **G**, baricentro delle tensioni concatenate.

Fig. 3



Il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{E_1} - \mathbf{E_2} = \mathbf{V_{12}} \\ \mathbf{E_2} - \mathbf{E_3} = \mathbf{V_{23}} \\ \mathbf{E_3} - \mathbf{E_1} = \mathbf{V_{31}} \end{cases} \tag{1}$$

in cui i termini noti sono le tensioni stellate rispetto a un centro stella *qualsiasi* e le incognite le tensioni di linea ammette una e una sola soluzione: $\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{23}$, $\mathbf{V}_{31}$. *Graficamente* le tensioni di linea si ottengono come lati del triangolo che ha come vertici gli estremi dei vettori delle tensioni stellate.

Invece, lo stesso sistema (1) in cui ora i termini noti sono le tensioni di linea e le incognite sono le tensioni stellate ammette infinite soluzioni, perché le tre equazioni nelle incognite $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$ non sono tutte linearmente indipendenti. Per esempio, la terza si ricava sommando a membro a membro le prime due. Infatti:

$$\mathbf{E_1} - \mathbf{E_2} + \mathbf{E_2} - \mathbf{E_3} = \mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{23}}$$

da cui, ricordando che: $\mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{13}} + \mathbf{V_{31}} = 0$, si ha:

$$\mathbf{E_1} - \mathbf{E_3} = -\mathbf{V_{31}}$$

e perciò:

$$\mathbf{E_3} - \mathbf{E_1} = \mathbf{V_{31}}$$

Graficamente: esistono infinite terne di tensioni stellate che hanno come origine un punto *qualunque* del piano (che contiene il triangolo delle tensioni concatenate) **e i cui estremi si appoggiano ai vertici del triangolo delle tensioni di linea**.

Tuttavia, come si dimostrerà tra breve, la somma delle tensioni stellate baricentriche ($\mathbf{E_{1G}}$, $\mathbf{E_{2G}}$, $\mathbf{E_{3G}}$) è zero; perciò, il sistema (2) seguente, in cui le tensioni stellate sono baricentriche:

$$\begin{cases} \mathbf{E_{1G}} - \mathbf{E_{2G}} = \mathbf{V_{12}} \\ \mathbf{E_{2G}} - \mathbf{E_{3G}} = \mathbf{V_{23}} \\ \mathbf{E_{1G}} + \mathbf{E_{2G}} + \mathbf{E_{3G}} = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

ammette **una e una sola terna di soluzioni**, fornite nel successivo paragrafo 4.

Le tensioni stellate baricentriche sono le tensioni di una *qualunque stella equilibrata* di impedenze e in modo grafico si ottengono unendo il baricentro **G** del triangolo delle tensioni concatenate con i vertici dello stesso triangolo.

LA SOMMA DELLE TENSIONI STELLATE BARICENTRICHE E' ZERO

Sia un sistema trifase *qualsiasi* (con tensioni di linea simmetriche o dissimmetriche) a **tre fili** che alimenta una *qualunque* stella **equilibrata** *di impedenze* **Z** percorse dalle correnti $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$. Applicando la legge di Ohm, si calcolano le tensioni di fase (o tensioni stellate):

$$\mathbf{E_1} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I_1}$$

$$\mathbf{E_2} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I_2}$$

$$\mathbf{E_3} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I_3}$$

Sommando a membro a membro, si ha:

$$\mathbf{E_1} + \mathbf{E_2} + \mathbf{E_3} = \mathbf{Z}\,\mathbf{I_1} + \mathbf{Z}\,\mathbf{I_2} + \mathbf{Z}\,\mathbf{I_3} = \mathbf{Z} \cdot (\mathbf{I_1} + \mathbf{I_2} + \mathbf{I_3}) = 0$$

(in una linea a tre fili la somma delle correnti di linea è zero per la prima legge di Kirchhoff).

Queste tensioni si chiamano tensioni stellate baricentriche e si indicano con i simboli: $\mathbf{E_{1G}}$, $\mathbf{E_{2G}}$, $\mathbf{E_{3G}}$.

4 CALCOLO DELLE TENSIONI STELLATE BARICENTRICHE

SOLUZIONE ANALITICA

Si risolve il sistema (2), che si riscrive:

$$\begin{cases} \mathbf{E_{1G}} - \mathbf{E_{2G}} = \mathbf{V_{12}} \\ \mathbf{E_{2G}} - \mathbf{E_{3G}} = \mathbf{V_{23}} \\ \mathbf{E_{1G}} + \mathbf{E_{2G}} + \mathbf{E_{3G}} = 0 \end{cases}$$

con il metodo dei determinanti.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{V_{12}} & -1 & 0 \\ \boldsymbol{V_{23}} & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \boldsymbol{V_{12}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{V_{23}} & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \boldsymbol{V_{12}} \\ 0 & 1 & \boldsymbol{V_{23}} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

I calcoli (con la triangolazione di *Sarrus*) forniscono:

$$\Delta = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\Delta_1 = \mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{23}} = \mathbf{2} \cdot \mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{23}}$$

$$\Delta_2 = \mathbf{V_{23}} - \mathbf{V_{12}}$$

$$\Delta_3 = -\mathbf{V_{23}} - \mathbf{V_{12}} - \mathbf{V_{23}} = -\mathbf{2} \cdot \mathbf{V_{23}} - \mathbf{V_{12}}$$

Ora, da:

$$\mathbf{V_{12}} + \mathbf{V_{23}} + \mathbf{V_{31}} = 0$$

si ricava prima la tensione $\mathbf{V_{23}}$ per sostituirla in Δ_1 e poi $-\mathbf{V_{12}}$ per sostituirla in Δ_3. Si ha, quindi, dopo aver semplificato:

$$\Delta_1 = \mathbf{V_{12}} - \mathbf{V_{31}}$$

$$\Delta_3 = \mathbf{V_{31}} - \mathbf{V_{23}}$$

Poiché le soluzioni del sistema sono:

$$\mathbf{E_{1G}} = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad \mathbf{E_{2G}} = \frac{\Delta_2}{\Delta} \qquad \mathbf{E_{3G}} = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

si ottiene, infine:

$$\mathbf{E_{1G}} = \frac{\mathbf{V_{12}} - \mathbf{V_{31}}}{3} \tag{3}$$

$$\mathbf{E_{2G}} = \frac{\mathbf{V_{23}} - \mathbf{V_{12}}}{3} \tag{4}$$

$$\mathbf{E_{3G}} = \frac{\mathbf{V_{31}} - \mathbf{V_{23}}}{3} \tag{5}$$

Sostituendo i valori numerici, si ha:

$$\mathbf{E_{1G}} = \frac{-118 + j350{,}679 - (-282 - j350{,}679)}{3} = 54{,}\overline{6} + j233{,}786 = 240{,}093\ \mathrm{V}\underline{/76{,}8389°}$$

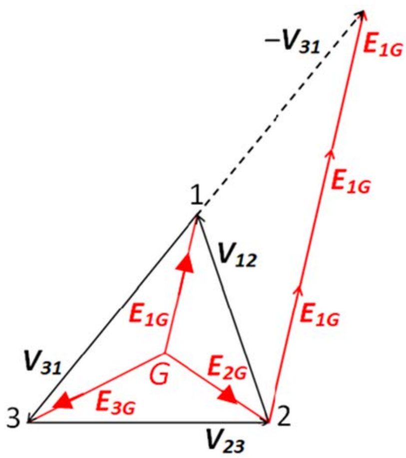
$$\mathbf{E_{2G}} = \frac{400 - (-118 + j350{,}679)}{3} = 172{,}\overline{6} - j116{,}893 = 208{,}513\ \mathrm{V}\underline{/-34{,}0975°}$$

$$\mathbf{E_{3G}} = \frac{-282 - 350{,}679 - 400}{3} = -227{,}\overline{3} - j116{,}893 = 255{,}626\ \mathrm{V}\underline{/-152{,}788°}$$

SOLUZIONE GRAFICA

Confrontando la figura 4:

Fig. 4



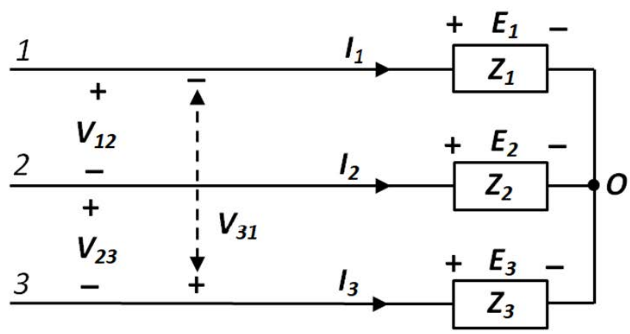
risulta: $\mathbf{E}_{1G}$ (che ha l'estremo in 1) è la differenza, divisa per 3, tra $\mathbf{V}_{12}$ (che *entra* in 1) e $\mathbf{V}_{31}$ (che *esce* da 1). In maniera analoga si possono ricavare le altre due tensioni stellate baricentriche. Infatti: $\mathbf{E}_{2G}$ (con l'estremo in 2) è la differenza, divisa per 3, tra $\mathbf{V}_{23}$ che (*entra* in 2) e $\mathbf{V}_{12}$ (che *esce* da 2); inoltre, $\mathbf{E}_{3G}$ (con l'estremo in 3) è la differenza tra $\mathbf{V}_{31}$ (che *entra* in 3) e $\mathbf{V}_{23}$ (che *esce* da 3).

Così, anche con questo metodo rapido si ottengono le soluzioni già viste in maniera analitica.

5 LINEA TRIFASE A TRE FILI DISSIMMETRICA CHE ALIMENTA UNA STELLA SQUILIBRATA DI IMPEDENZE

Si consideri una linea trifase a tre fili con tensioni concatenate dissimmetriche $\mathbf{V}_{12}$, $\mathbf{V}_{23}$, $\mathbf{V}_{31}$ che alimenta un carico squilibrato di impedenze $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_3$ connesse a stella, di centro *O*. L'utilizzatore assorbe le correnti $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ sotto le tensioni $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$ (figura 5).

Fig. 5



Le tensioni di linea che compaiono nel disegno si possono interpretare come le tensioni di fase di un generatore collegato a triangolo che alimenta la rete, così com'è stato fatto nei circuiti simulati con *Multisim* nella *Parte Prima* dell'articolo.

Ora, assegnate le tensioni di linea, si è già visto che il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_3 = \mathbf{V}_{23} \\ \mathbf{E}_3 - \mathbf{E}_1 = \mathbf{V}_{31} \end{cases}$$

in cui le incognite sono le tensioni stellate ammette infinite soluzioni. La terna di tensioni stellate baricentriche $\mathbf{E_{1G}}$, $\mathbf{E_{2G}}$, $\mathbf{E_{3G}}$ è senz'altro *una* soluzione e il loro calcolo è immediato con le (3), (4) e (5) del paragrafo 4. Anche queste tensioni si possono interpretare come le tensioni di fase di un generatore connesso – in questo caso – a stella, con centro ***G***, che alimenta la linea: sono, quindi, tensioni stellate. Perciò, la rete di figura 5 è del tutto equivalente al circuito di figura 6, che ha solo due nodi e, dunque, si risolve con facilità per mezzo del teorema di *Millman*.

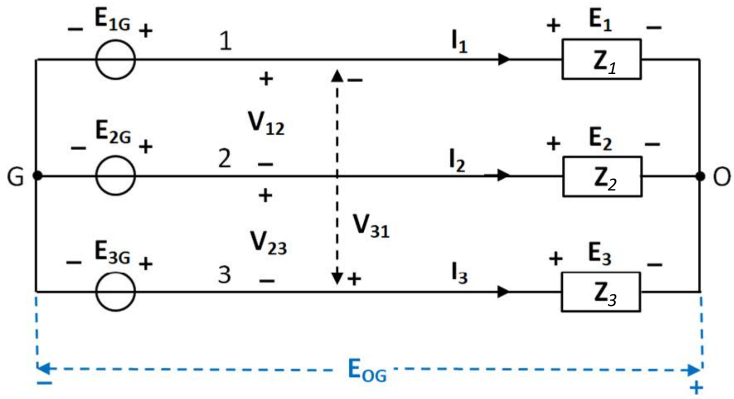


Fig. 6

Fisicamente le $\mathbf{E_{1G}}$, $\mathbf{E_{2G}}$, $\mathbf{E_{3G}}$ si possono ottenere derivando dalla linea una stella equilibrata di impedenze **Z** **qualsiasi**, come nella figura 7, in cui le tensioni stellate baricentriche coincidono con le cadute di tensione dovute alle correnti $\mathbf{I_{1G}}$, $\mathbf{I_{2G}}$, $\mathbf{I_{3G}}$ nelle impedenze **Z**. E' interessante verificare (in modo analitico o con *Multisim*) che, al variare dei valori delle **Z**, variano, naturalmente, le correnti assorbite, ma le c.d.t. non cambiano: si ottiene così una conferma **dell'unicità delle tensioni stellate baricentriche** di una stessa linea.

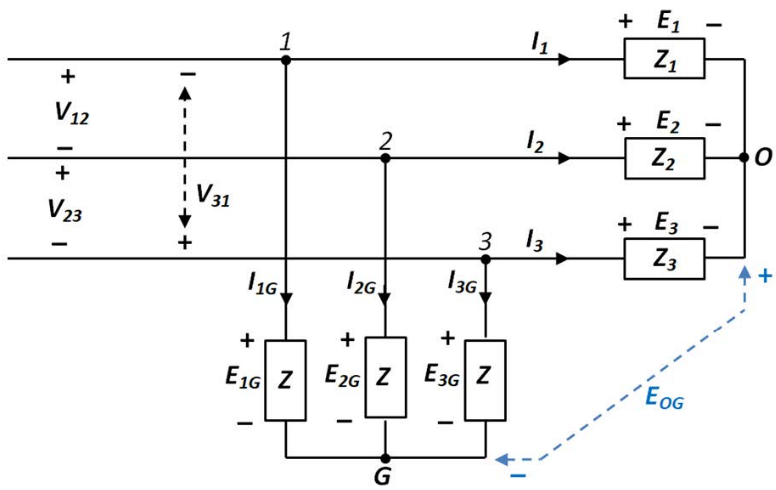


Fig. 7

6 CALCOLO DELLE TENSIONI STELLATE, DELLE CORRENTI DI LINEA E DELLA POTENZA ATTIVA

Si consideri il circuito della figura 6 a cui si applica il teorema di Millman per ottenere la tensione $\mathbf{E_{OG}}$, cioè, lo spostamento del centro stella (reale o concreto ***O*** rispetto al centro stella astratto o teorico o baricentro ***G***). Si calcoleranno poi le tensioni stellate $\mathbf{E_1}$, $\mathbf{E_2}$, $\mathbf{E_3}$ e le correnti di linea $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$, $\mathbf{I_3}$.

La tabella seguente riporta per comodità i valori delle grandezze conosciute o ricavate finora.

$\mathbf{Z_1}$ = 30+i20 = = 36,0555 Ω $\underline{/33{,}6901°}$	$\mathbf{V_{12}}$ = −118+j350,679 = = 370 V $\underline{/108{,}598°}$	$\mathbf{E_{1G}}$ = 54,$\overline{6}$+j233,786 = = 240,093 V $\underline{/76{,}8389°}$
$\mathbf{Z_2}$ = 10+j5 = = 11,1803 Ω $\underline{/26{,}5651°}$	$\mathbf{V_{23}}$ = 400 V	$\mathbf{E_{2G}}$ =172,$\overline{6}$–j116,893 = = 208,513 V $\underline{/-34{,}0975°}$
$\mathbf{Z_3}$ = 18+j6 = = 18,9737 Ω $\underline{/18{,}4349°}$	$\mathbf{V_{31}}$ = −282–j350,679 = = 450 V $\underline{/-128{,}805°}$	$\mathbf{E_{3G}}$ = −227,333–j116,893= = 255,626 V $\underline{/-152{,}788°}$

$$\underline{\mathbf{E_{OG}}} = \frac{\frac{\mathbf{E_{1G}}}{\mathbf{Z_1}} + \frac{\mathbf{E_{2G}}}{\mathbf{Z_2}} + \frac{\mathbf{E_{3G}}}{\mathbf{Z_3}}}{\frac{1}{\mathbf{Z_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z_2}} + \frac{1}{\mathbf{Z_3}}} \tag{6}$$

$$\mathbf{E_{OG}} = \frac{\frac{54,\overline{6} + j233{,}786}{30 + j20} + \frac{172,\overline{6} - j116{,}893}{10 + j5} + \frac{-227,\overline{3} - j116{,}893}{18 + j6}}{\frac{1}{30 + j20} + \frac{1}{10 + j5} + \frac{1}{18 + j6}}$$

$$\mathbf{E_{OG}} = 38{,}2776 - j71{,}8716 = 81{,}4292\ \mathrm{V}\underline{/-61{,}9610°}$$

Con la legge di Ohm (al circuito della figura 6) si ricavano $\mathbf{E_1}$ e $\mathbf{I_1}$:

$$\mathbf{E_1} = \mathbf{E_{1G}} - \mathbf{E_{OG}}$$

$$\mathbf{E_1} = 54,\overline{6} + j233{,}786 - (38{,}2776 - j71{,}8716) = 16{,}3891 + j305{,}658 = 306{,}097\ \mathrm{V}\underline{/86{,}9308°}$$

$$\mathbf{I_1} = \frac{\mathbf{E_1}}{\mathbf{Z_1}} = \frac{16{,}3891 + j305{,}658}{30 + j20} = 5{,}08064 + j6{,}80150 = 8{,}48960\ \mathrm{A}\ \underline{/53{,}2407°}$$

Ancora con la legge di Ohm:

$$\mathbf{E_2} = \mathbf{E_{2G}} - \mathbf{E_{OG}}$$

$$\mathbf{E_2} = 172,\overline{6} - j116{,}893 - (38{,}2776 - j71{,}8716) = 134{,}389 - j45{,}0215 = 141{,}730\ \mathrm{V}\underline{/-18{,}5213°}$$

$$\mathbf{I_2} = \frac{\mathbf{E_2}}{\mathbf{Z_2}} = \frac{134{,}389 - j45{,}0215}{10 + j5} = 8{,}95027 - j8{,}97728 = 12{,}6767\ \mathrm{A}\ \underline{/-45{,}0863°}$$

Infine:

$$\mathbf{E_3} = \mathbf{E_{3G}} - \mathbf{E_{OG}}$$

$$\mathbf{E_3} = -227,\overline{3} - j116{,}893 - (38{,}2776 - j71{,}8716) = -265{,}611 - j45{,}0215 = 269{,}400\ \mathrm{V}\underline{/-170{,}380°}$$

$$\mathbf{I_3} = \frac{\mathbf{E_3}}{\mathbf{Z_3}} = \frac{-265{,}611 - j45{,}0215}{18 + j6} = -14{,}0309 + j2{,}17578 = 14{,}1986\ \mathrm{A}\ \underline{/171{,}185°}$$

La potenza attiva è uguale alla somma delle potenze attive assorbite da ciascuna fase della stella di impedenze di centro ***O*** (reale, concreto):

$P = P_1 + P_2 + P_3 = \mathbf{E_1} \times \mathbf{I_1} + \mathbf{E_2} \times \mathbf{I_2} + \mathbf{E_3} \times \mathbf{I_3}$

$$P_1 = 306{,}097 \cdot 8{,}48960 \cdot \cos(86{,}9308 - 53{,}2407) = 2162{,}20\ \mathrm{W}$$

$$P_2 = 141{,}730 \cdot 12{,}6767 \cdot \cos\,(-18{,}5213 - (-45{,}0863)) = 1606{,}99\ \mathrm{W}$$

$$P_3 = 269{,}400 \cdot 14{,}1986 \cdot \cos(-170{,}380 - 171{,}185) = 3628{,}81\ \mathrm{W}$$

$$P = 2162{,}20 + 1606{,}99 + 3628{,}81 = 7397{,}99\ \mathrm{W} \tag{7}$$

(Con maggiore precisione *Excel* dà: 7397,993 430 874 89 W)

La potenza calcolata in questo modo corrisponde a quella misurata con tre wattmetri, ognuno dei quali ha il circuito voltmetrico in parallelo e il circuito ampermetrico in serie con un'impedenza della stella di carico.

7 CALCOLO DELLA POTENZA ATTIVA CON UN CENTRO STELLA QUALSIASI

Si ricordi l'enunciato del teorema di Aron per la potenza attiva P e per la potenza reattiva Q:

> In un sistema trifase *a tre fili* qualsiasi la potenza attiva P assorbita dagli utilizzatori è uguale alla somma dei prodotti scalari delle tensioni stellate rispetto a un *qualunque* centro stella per le *correnti di linea*:

$$P = \mathbf{E}'_1 \times \mathbf{I_1} + \mathbf{E}'_2 \times \mathbf{I_2} + \mathbf{E}'_3 \times \mathbf{I_3} \tag{8}$$

> E, in modo analogo, per la potenza reattiva Q si ha:

$$Q = -j\mathbf{E}'_1 \times \mathbf{I_1} - j\mathbf{E}'_2 \times \mathbf{I_2} - j\mathbf{E}'_3 \times \mathbf{I_3} \tag{9}$$

Si svolgono ora alcuni esempi di verifica del teorema, risolvendo gli stessi circuiti simulati con *Multisim* nella *Prima Parte*, a cui si rimanda.

CENTRO STELLA OTTENUTO CON UNA GENERICA STELLA SQUILIBRATA DI IMPEDENZE: CENTRO O'

Si consideri la *generica* stella squilibrata di impedenze, di centro *O'*:

$\mathbf{Z'_1} = 150\ \Omega$

$\mathbf{Z'_2} = 120 + j240\ \Omega$ (f=50 Hz; L=763,944 mH)

$\mathbf{Z'_3} = 240\ \Omega$

disegnata nella successiva figura 8 insieme con la stella squilibrata dell'utilizzatore, di centro *O*, e con la stella equilibrata, di centro *G*.

Poiché la linea è la stessa, non cambiano le tensioni stellate baricentriche; così la (6) si modifica nella (10):

$$\mathbf{E_{O'G}} = \frac{\dfrac{\mathbf{E_{1G}}}{\mathbf{Z}'_1} + \dfrac{\mathbf{E_{2G}}}{\mathbf{Z}'_2} + \dfrac{\mathbf{E_{3G}}}{\mathbf{Z}'_3}}{\dfrac{1}{\mathbf{Z}'_1} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}'_2} + \dfrac{1}{\mathbf{Z}'_3}} \tag{10}$$

La procedura di calcolo è del tutto uguale a quella già vista; perciò, si forniscono solo i risultati.

Lo spostamento del centro stella *O'* rispetto a *G* è:

$\mathbf{E_{O'G}}$ = = –57,1331 + j8,85594 = 57,8154 V $\underline{/171{,}189°}$

Le tensioni stellate rispetto al centro stella *O'* sono:

$\mathbf{E'_1}$ = 111,800 + j224,930 = 251,183 V $\underline{/63{,}5707°}$

$\mathbf{E'_2}$ = 229,800 – j125,749 = 261,956 V $\underline{/-28{,}6880°}$

$\mathbf{E'_3}$ = -170,200 – j125,749 = 211,615 V $\underline{/–143,542°}$

Con questi valori e con le correnti di linea del carico, ricavate nel paragrafo 6, i tre prodotti scalari della (8) forniscono le espressioni:

$\mathbf{E}_1' \times \mathbf{I}_1$ = 57,8154 ·8,48960 ·cos(63,5707–53,2407) = 2097,88 W

$\mathbf{E}_2' \times \mathbf{I}_2$ = 261,956 ·12,6767 · cos(–28,6880–(–45,0863)) = 3185,65 W

$\mathbf{E}_3' \times \mathbf{I}_3$ = 211,615 · 14,1986 · cos(–143,542–171,185) = 2114,46 W

che coincidono con le potenze misurate da tre wattmetri, ognuno con il circuito voltmetrico in parallelo ad un'impedenza della nuova stella di centro *O'* e con il circuito ampermetrico in serie con un'impedenza della stella del carico di centro *O* (come si vede nella figura 8 della *Parte Prima*).

Perciò, la potenza attiva assorbita è:

P = 2097,88 + 3185,65 + 2114,46 = 7397,99 W (11)

(con maggiore precisione *Excel* dà: 7397,993 430 874 89 W)

I valori indicati nella (7) e nella (11) sono identici: si è così ottenuta una verifica del teorema di Aron, che assicura l'invarianza della potenza attiva rispetto al centro stella, purché le correnti $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$ siano le *stesse correnti di linea* del carico.

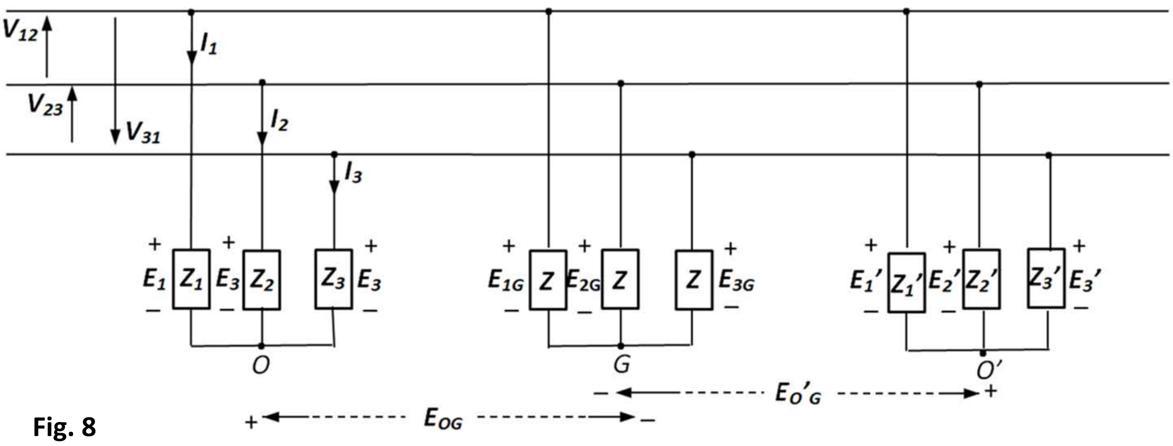


Fig. 8

CENTRO STELLA OTTENUTO CON UNA STELLA EQUILIBRATA DI IMPEDENZE: BARICENTRO G

Ora si consideri la stella *equilibrata* di impedenze **Z**, di centro *G*; perciò le tensioni stellate sono *baricentriche* e i valori numerici, che dipendono solo dalle tensioni di linea e non dalla scelta delle **Z** (uguali), sono stati ottenuti nel paragrafo 4.

Eseguendo le indicazioni di calcolo della (8), in cui le $\mathbf{E'_1}$, $\mathbf{E'_2}$, $\mathbf{E'_3}$ sono sostituite ora rispettivamente da $\mathbf{E_{1G}}$, $\mathbf{E_{2G}}$, $\mathbf{E_{3G}}$, si ha:

$\mathbf{E_{1G}}$ x $\mathbf{I_1}$ = 240,093 · 8,48960 · cos(76,8389–53,2407) = 1867,84 W

$\mathbf{E_{2G}}$ x $\mathbf{I_2}$ = 208,513 · 12,6767 · cos(–34,0975–(–45,0863)) = 2594,79 W

$\mathbf{E_{3G}}$ x $\mathbf{I_3}$ = 255,626 · 14,1986 · cos(–152,788–171,185) = 2935,36 W

Perciò, la potenza P assorbita dall'utilizzatore è:

P = 1867,84 + 2594,79 + 2935,36 = 7397,99 W

Il valore è identico a quelli già trovati (con maggiore precisione *Excel* fornisce ancora: 7397,993 430 874 89 W)

I termini della somma che dà la potenza coincidono con le indicazioni dei wattmetri W1, W2, W3 della figura 9 della *Parte Prima*.

CENTRO STELLA COINCIDENTE CON UN PUNTO QUALUNQUE DI UN CONDUTTORE DI LINEA

Conduttore 3

Si prenda ora come centro stella un punto qualunque su un conduttore di linea: per esempio, sul filo 3. Allora, dalla figura 3 del paragrafo 3 si ricava:

$$\mathbf{E'_1} = \mathbf{V_{13}}$$
$$\mathbf{E'_2} = \mathbf{V_{23}}$$
$$\mathbf{E'_3} = 0$$

e quindi la (8) diventa:

$$P = \mathbf{V_{13}} \times \mathbf{I_1} + \mathbf{V_{23}} \times \mathbf{I_2} \qquad (12)$$

Poiché risulta: $\mathbf{V_{13}} = -\mathbf{V_{31}} = -(-282 - j350{,}679) = 282 + j350{,}679 = 450\ V\ \underline{/51{,}1954°}$

si ha:

$$\mathbf{V_{13}} \times \mathbf{I_1} = 450 \cdot 8{,}48960 \cdot \cos(51{,}1954-53{,}2407) = 3817{,}89\ W$$
$$\mathbf{V_{23}} \times \mathbf{I_2} = 400 \cdot 12{,}6767 \cdot \cos(0-(-45{,}0863)) = 3580{,}11\ W$$

Perciò, la potenza attiva è:

$$P = \mathbf{V_{13}} \times \mathbf{I_1} + \mathbf{V_{23}} \times \mathbf{I_2} = 3817{,}89 + 3580{,}11 = 7397{,}99\ W \qquad (7397{,}993\,430\,874\,89\ W)$$

coincidente con tutti i valori già trovati.

La (12) scritta anche nella forma:

$$P = P_{13} + P_{23}$$

corrisponde all'indicazione di due wattmetri: il primo con il circuito voltmetrico tra la linea 1 e la linea 3 e con il circuito amperometrico percorso dalla corrente di linea $\mathbf{I_1}$ (wattmetro A1 a ponte maggiore); il secondo con il circuito voltmetrico tra la linea 2 e la linea 3 e con il circuito ampermetrico percorso dalla corrente $\mathbf{I_2}$ (wattmetro B2 a ponte minore). Si è ottenuta così l'inserzione Aron. Si veda la fig. 9 (si può confrontare anche la figura 11 della *Parte Prima*).

Conduttore 1

Se, invece, come centro stella si prende un punto qualunque sul conduttore 1, sempre dalla figura 3 del paragrafo 3 si ha:

$$\mathbf{E'_1} = 0$$
$$\mathbf{E'_2} = \mathbf{V_{21}}$$
$$\mathbf{E'_3} = \mathbf{V_{31}}$$

e quindi la (8) che esprime il teorema di Aron diventa:

$$P = \mathbf{V_{21}} \times \mathbf{I_2} + \mathbf{V_{31}} \times \mathbf{I_3} \qquad (13)$$

Essendo:

$$\mathbf{V_{21}} = -\mathbf{V_{12}} = -(-118 + j350{,}679) = 118 - j350{,}679 = 370\ V\ \underline{/-71{,}4024°}$$

si ha:

$$\mathbf{V_{21}} \times \mathbf{I_2} = 370 \cdot 12{,}6767 \cdot \cos(-71{,}4024-(-45{,}0863)) = 4204{,}28\ W$$
$$\mathbf{V_{31}} \times \mathbf{I_3} = 450 \cdot 171{,}185 \cdot \cos(-128{,}085-171{,}185) = 3193{,}72\ W$$
$$P = \mathbf{V_{21}} \times \mathbf{I_2} + \mathbf{V_{31}} \times \mathbf{I_3} = 4204{,}28 + 3193{,}72 = 7397{,}99\ W \qquad (7397{,}99343087488\ W)$$

Come si vede, la potenza P è rimasta invariata.

La (13), che si scrive anche come:

$$P = P_{21} + P_{31}$$

corrisponde alla somma algebrica delle indicazioni di due wattmetri i*n Aron*: A2 inserito a ponte maggiore e B2 a ponte minore, come nella figura 10.

Conduttore 2

Se, infine, come centro stella si prende un punto qualunque sul filo 2, confrontando ancora la figura 3 del paragrafo 3, si ha:

$$\mathbf{E'_1} = \mathbf{V_{12}}$$
$$\mathbf{E'_2} = 0$$
$$\mathbf{E'_3} = \mathbf{V_{32}}$$

Applicando il teorema di Aron, risulta:

$$P = \mathbf{V_{12}} \times \mathbf{I_1} + \mathbf{V_{32}} \times \mathbf{I_3} \qquad (14)$$

Essendo:

$$\mathbf{V_{32}} = -\mathbf{V_{23}} = -400 = 400 \text{ V}\underline{/180°}$$

Si ottiene:

$$\mathbf{V_{12}} \times \mathbf{I_1} = 370 \cdot 8{,}48960 \cdot \cos(108{,}598 - 53{,}2407) = 1785{,}63 \text{ W}$$
$$\mathbf{V_{32}} \times \mathbf{I_3} = 400 \cdot 14{,}1986 \cdot \cos(180-171{,}185) = 5612{,}36 \text{ W}$$
$$P = \mathbf{V_{12}} \times \mathbf{I_1} + \mathbf{V_{32}} \times \mathbf{I_3} = 1785{,}63 + 5612{,}36 = 7397{,}99 \text{ W} \qquad (P=7397{,}9934308749\text{1 W})$$

Anche in questo caso la potenza attiva P è rimasta invariata.

La (14) nella forma:

$$P = P_{12} + P_{32}$$

corrisponde alla somma algebrica delle indicazioni di due wattmetri *in Aron*: B1 inserito a ponte minore e A3 a ponte maggiore, come si vede nella figura 11.

Perciò, l'inserzione Aron può essere fatta equivalentemente in tre modi diversi. Se si indicano con gli stessi simboli i wattmetri e le loro letture, si ha:

$$P = P_{13} + P_{23} = A1 + B2$$
$$P = P_{21} + P_{31} = A2 + B3$$
$$P = P_{32} + P_{12} = A3 + B1$$

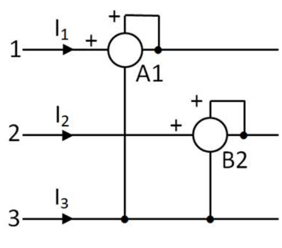


Fig. 9

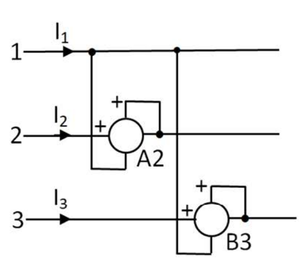


Fig. 10

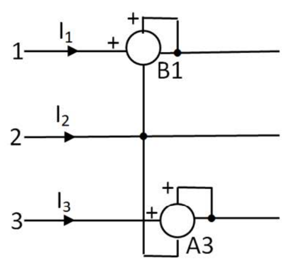


Fig. 11

8 VERIFICA DEL TEOREMA DI ARON PER LA POTENZA REATTIVA

Si verifica ora il teorema di Aron per la potenza reattiva e perciò si utilizza la (9) del paragrafo 7 per calcolare la Q assorbita dalla stella squilibrata di impedenze, che per comodità si riscrivono:

$$\mathbf{Z_1} = R_1 + jX_1 = 30 + j20\ \Omega$$

$$\mathbf{Z_2} = R_2 + jX_2 = 10 + j5\ \Omega$$

$$\mathbf{Z_3} = R_3 + jX_3 = 18 + j6\ \Omega$$

Le tensioni della linea dissimmetrica a tre fili e le correnti di linea hanno i valori già noti.

Conduttore 3

Prendendo come centro stella un punto qualunque sul filo 3, dalla figura 3 (del paragrafo 3) si vede che, in questo caso, **O'** viene a coincidere con il vertice 3 e, perciò, si ha:

$$-j\mathbf{E'_1} = -j\mathbf{V_{13}}$$

$$-j\mathbf{E'_2} = -j\mathbf{V_{23}}$$

$$-j\mathbf{E'_3} = 0$$

Per il teorema di Aron riferito alla potenza reattiva, la (9) diventa:

$$Q = -j\mathbf{V_{13}} \times \mathbf{I_1} - j\mathbf{V_{23}} \times \mathbf{I_2} \tag{15}$$

Poiché risulta:

$$-j\mathbf{V_{13}} = (-j) \cdot (-\mathbf{V_{31}}) = j\mathbf{V_{31}} = 1\ \underline{/90°} \cdot 450\ \underline{/-128{,}805} = 450\ \text{V}\underline{/-38{,}8046°}$$

$$-j\mathbf{V_{23}} = 1\ \underline{/-90} \cdot 400 = 400\ \text{V}\underline{/-90}$$

si ottiene:

$$-j\mathbf{V_{13}} \times \mathbf{I_1} = 450 \cdot 8{,}48960 \cdot \cos(-38{,}8046-53{,}2407) = -136{,}349\ \text{var}$$

$$-j\mathbf{V_{23}} \times \mathbf{I_2} = 400 \cdot 12{,}6767 \cdot \cos(-90-(-45{,}0863)) = 3590{,}91\ \text{var}$$

Perciò, la potenza reattiva è:

$$Q = -j\mathbf{V_{13}} \times \mathbf{I_1} - j\mathbf{V_{23}} \times \mathbf{I_2} = -136{,}349 + 3590{,}91 = 3454{,}56\ \text{var}$$

(*Excel* dà:3454,562 555 986 85 var)

La (15) si scrive anche nella forma:

$$Q = Q_{13} + Q_{23}$$

che corrisponde alla **potenza misurata da due varmetri** in inserzione Aron: il primo con il circuito ampermetrico sulla linea 1 e quello voltmetrico tra le linee 1 e 3; il secondo con il circuito ampermetrico sul filo 2 e il voltmetrico tra 2 e 3.

Si precisa che la misura di Q con l'impiego di varmetri si definisce **diretta**; quella invece ricavata elaborando le indicazioni di wattmetri si dice **indiretta**, e quest'ultima è molto più diffusa dell'altra.

Conduttore 1

Con il centro stella su un punto qualunque del conduttore 1, nella figura 3 del paragrafo 3 **O'** si sovrappone al vertice 1; allora:

$$-j\mathbf{E'_1} = 0$$

$$-j\mathbf{E'_2} = -j\mathbf{V_{21}}$$

$$-j\mathbf{E'_3} = -j\mathbf{V_{31}}$$

Sostituendo nella (9), si ha:

$$Q = -j\mathbf{V}_{21} \times \mathbf{I}_2 - j\mathbf{V}_{31} \times \mathbf{I}_3 \qquad (16)$$

Poiché risulta:

$$-j\mathbf{V}_{21} = (-j) \cdot (-\mathbf{V}_{12}) = j\mathbf{V}_{12} = 1\ \underline{/90°} \cdot 370\ \underline{/108{,}598°} = 370\ \mathrm{V}\ \underline{/-161{,}402°}$$

$$-j\mathbf{V}_{31} = 1\ \underline{/-90} \cdot 450\ \underline{/-128{,}805} = 450\ \mathrm{V}\ \underline{/141{,}195°}$$

si ottiene:

$$-j\mathbf{V}_{21} \times \mathbf{I}_2 = 370 \cdot 12{,}6767 \cdot \cos(-161{,}402-(-45{,}0863)) = -2079{,}35\ \mathrm{var}$$

$$-j\mathbf{V}_{31} \times \mathbf{I}_3 = 450 \cdot 14{,}1986 \cdot \cos(141{,}195-171{,}185) = 5533{,}92\ \mathrm{var}$$

Perciò, la potenza reattiva è:

$$Q = -j\mathbf{V}_{21} \times \mathbf{I}_2 - j\mathbf{V}_{31} \times \mathbf{I}_3 = -2079{,}35 + 5533{,}92 = 3454{,}56\ \mathrm{var}$$

(*Excel* dà: 3454,562 555 986 88 var)

Il calcolo ha fornito lo stesso valore di Q anche con il nuovo centro stella: si è così verificato che Q è invariante rispetto al centro stella.

La (16) scritta nella forma:.

$$Q = Q_{21} + Q_{31}$$

corrisponde alla **potenza misurata (in modo diretto) da due varmetri** in inserzione Aron.

Conduttore 2

Se, invece, sempre dalla figura 3 del paragrafo 3 **O'** è sul filo 2, si ha:

$$-j\mathbf{E}'_1 = -j\mathbf{V}_{12}$$

$$-j\mathbf{E}'_2 = 0$$

$$-j\mathbf{E}'_3 = -j\mathbf{V}_{32}$$

Proseguendo nel modo ormai consueto, si ottiene ancora la stessa potenza reattiva. In questo caso Q si può porre nella forma:

$$Q = Q_{32} + Q_{12}$$

che mostra la *terza inserzione Aron di varmetri*.

> È importante osservare che, sebbene il **teorema** di Aron per la potenza attiva P e reattiva Q sia valido per qualunque sistema trifase a tre fili, tuttavia l'**inserzione Aron di due wattmetri** permette la misura **indiretta** della potenza reattiva solo nei sistemi a tre fili simmetrici ed equilibrati. Per questi si potrebbe dimostrare facilmente che si ha, per esempio: $Q = \sqrt{3} \cdot (\mathrm{A1} - \mathrm{B2})$. Negli altri casi l'inserzione dei wattmetri avviene con schemi opportuni secondo il tipo di rete.